SOLUCIÓN PRUEBA Nº 1 2017-1

1. Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ A, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   a) ¿Es posible encontrar un número real A, de modo que f sea continua en todo el plano $\mathbb{R}^2$?. Justifique su respuesta.

   SOLUCIÓN:
   f es continua $\forall(x,y)\neq(0,0)$. El problema se presenta en $(0,0)$

   2 puntos

   Si consideremos el camino $x=0\Rightarrow \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(-y)^2}{y^2}=1$, por otro lado si consideramos el camino $y=x\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{2x^2}=0$. Por lo tanto el límite no existe y tampoco valor de A para que sea continua en $(0,0)$

   5 puntos

   b) ¿ Es posible encontrar un número real A, de modo que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, existan en $(0,0)$? Justifique su respuesta.

   SOLUCIÓN:
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h^2}{h^2}-A}{h}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-A}{h}$.
   Claramente este límite existe cuando $A=1$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. De igual manera $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

   4+4 puntos

2. Sea $f(x,y)=\dfrac{2xe^{3y^2-12}}{x^2+1}+\dfrac{2x+3}{y^2+1}$

   a) ¿Es f diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$? Justifique su respuesta.

   SOLUCIÓN:

$$f_x(x,y)=\frac{2e^{3y^2-12}(x^2+1)-4x^2e^{3y^2-12}}{(x^2+1)^2}+\frac{2}{y^2+1}\quad,\quad f_y(x,y)=\frac{12xye^{3y^2-12}}{x^2+1}-\frac{2y(2x+3)}{(y^2+1)^2}$$

   4 puntos

   Como f es continua con derivadas parciales continuas, entonces f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

   2 puntos

b) Encuentre la ecuación del plano tangente a f en el punto $(0,2,\frac{3}{5})$.

SOLUCIÓN:
Usamos la ecuación del plano dada por:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Por otro lado $f_x(0,2) = 2 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{12}{5}$ y $f_y(0,2) = -\dfrac{12}{25}$

3 puntos

reemplazando tenemos que: $z - \dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{5}x - \dfrac{12}{25}(y-2) \Leftrightarrow 60x - 12y - 25z + 39 = 0$

4 puntos

c) Encuentre un vector unitario tal que la derivada direccional de f en $(0,2)$ sea igual a 0.

SOLUCIÓN:
$D_{\hat{u}}f(0,2) = f_x(0,2)a + f_y(0,2)b = 0 \Leftrightarrow \dfrac{12a}{5} - \dfrac{12b}{25} = 0$, por lo que $5a = b$ Además como $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow 26a^2 = 1$ tenemos dos posibilidades:

2 puntos

$$\hat{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}}\right) \quad \text{ó} \quad \hat{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$$

5 puntos

3. a) La temperatura en una placa circular $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ esta dada por $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x + 5$. Determine los puntos sobre la placa que están a mayor y a menor temperatura.

SOLUCIÓN:
Primero veamos al interior de D, para esto resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} T_x &= 2x - 1 = 0 \\ T_y &= 4y = 0 \end{aligned}$$

Por lo que el punto $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ es un punto crítico dentro de D. Ahora

$$H(x,y) = T_{xx}T_{yy} - T_{xy}^2 = 8 \quad , \quad H\left(\frac{1}{2},0\right) = 8 \quad \text{y} \quad T_{xx}\left(\frac{1}{2},0\right) = 2$$

Entonces $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ es un mínimo igual a $T\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) = \dfrac{19}{4}$

5 puntos

Para ver la frontera usamos multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} T(x,y) &= x^2 - 2y^2 - x + 5 \quad \text{sujeto a} \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Así el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \end{aligned}$$

Por lo que:

- $T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{29}{4} = T\left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
- $T(1,0) = 5$
- $T(-1,0) = 7$

5 puntos

Así tenemos que los máximos son: $T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{29}{4} = T\left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ y el mínimo es $T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{19}{4}$

5 puntos

b) Sea una f una función diferenciable. Si $w = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$. Calcule el valor de la expresión:

$$E = x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y}$$

Ayuda: Defina $u = \dfrac{x+y}{x-y}$

SOLUCIÓN:

- $\dfrac{\partial w}{\partial x} = f'(u) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot \dfrac{-2y}{(x-y)^2}$

3 puntos

- $\dfrac{\partial w}{\partial y} = f'(u) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \cdot \dfrac{2x}{(x-y)^2}$

3 puntos

Luego

$$E = x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

4 puntos